Revista de Educación Matemática
Volumen 33, N° 2 (2018), páginas 41 – 44
Unión Matemática Argentina - Famaf (UNC)

REFLEXIONES DE UN MATEMÁTICO GENIAL

Juan Carlos Dalmasso

Como puede observarse en la historia reciente, volvemos periódicamente a tropezar en la misma piedra y sus consecuencias son, en Educación, los catastróficos resultados en las pruebas de evaluación. Estas crisis se parecen a las económicas, son cada vez más profundas y graves. Se sale de ellas con inteligencia y no solo con voluntarismo.

Quizá debamos recordar que, en octubre de 1986, el Dr. Alberto Calderón, con el peso de su personalidad y su prestigio, nos hizo conocer sus reflexiones sobre la enseñanza y sobre todo, del aprendizaje en matemática (Calderón, 1987). Hoy, frente a la pregunta ¿por qué nos pasa? quizá sea necesario volver a ellas. Esto no es poco, se trata nada menos, que del formador de varias generaciones de investigadores exitosos que "cubrieron" el mapamundi universal matemático.

Calderón parte de las preguntas que frecuentemente hacen los niños para comprender el mundo exterior y concluye que son de dos clases: las del **tipo A:** ¿cómo?, ¿de qué manera? o ¿por qué?, que incumben a causas o estructuras lógicas del mundo y las del **tipo B:** ¿para qué? o ¿para cuál fin? o ¿para qué sirve?, que conciernen a aspectos teleológicos o finalidad. Estas últimas son también en las que insisten los alumnos en clases matemáticas y, como veremos más adelante, ello no es necesariamente por inmadurez.

Su primera reflexión

"... si algo tiene una finalidad, el conocimiento de ésta es indispensable para su comprensión."

Aquí Calderón entra en la estructura del pensamiento, no para la especulación, sino con propósitos verdaderamente útiles, al señalar la importancia que tiene en la Pedagogía de la matemática y observa que todas las disciplinas del pensamiento comparten con la matemática esta curiosidad.

Respecto de su primera reflexión señala que hay una tendencia muy afianzada en la docencia que va en sentido contrario a su manera de pensar, por agregar:

uno puede imaginar su estudio con prescindencia total de los interrogantes del ¿para qué?, pero los resultados serán siempre precarios.

> *"... el conocimiento de las finalidades tiene consecuencias inmediatas en al aprendizaje. Es bien sabido que se aprende mucho mejor y más rápido si se lo hace persiguiendo algo. Esto se aplica particularmente a la matemática ... La presencia de una meta más o menos definida ilumina el camino a seguir, aviva el interés y permite valorar los distintos aspectos de la disciplina destacando lo primario y relegando lo secundario al lugar que corresponda. Eliminada la meta, la marcha parece a la deriva, el panorama adquiere un aspecto monótono indiferenciado y todo aparece como una acumulación de especulaciones difíciles y horriblemente aburridas."*

Con estas observaciones, sugiere recurrir al desarrollo histórico de la matemática para ver que, aún en sus capítulos más abstractos y aparentemente más alejados de las aplicaciones, no están desgajados de una red de interrelaciones que la vinculan con aspectos concretos de la realidad y sus aplicaciones. Quizá nos mandaba a estudiar Historia, con el mismo entusiasmo y con la misma sintonía que Simón Laplace sugería a sus alumnos "leed a Euler, *es el maestro de todos nosotros*".

¿Por qué pensé en Euler? Recordé una cita de Raymond Ayoub en referencia a él: "Leer sus artículos es una experiencia estimulante; uno está impresionado por la gran imaginación y originalidad. A veces, un resultado familiar para el lector, adquiere un aspecto original e iluminador que se necesita para entender mejor, y que los autores posteriores lograron ocultar." En esas prosas estaban las ideas vivas del pensamiento contemporáneo a Euler. Como muy pocos, inventaba ideas vitales en cataratas y las comunicaba con la misma frescura y entusiasmo de cuando se le ocurrían; esto se contrapone con la tendencia vanidosa de encubrir la pasión del creador, detrás de un fárrago de prosa técnica, de los formados solo en manuales. Euler claramente se estaba divirtiendo, persiguiendo las ideas activas que concebía, mientras jugaba para su propio disfrute, y además, exhibiendo una confianza arrolladora en que su búsqueda sería exitosa, según cuenta la Historia. Los que hacemos olimpíadas sabemos cuánto disfrutan los participantes exhibiendo las ideas que pergeñaron.

Leer historia parece ser para Calderón, la manera de encontrar las ideas vivaces que fermentan en la cabeza del genio. Ellas crecieron y se desarrollaron en la mente de los matemáticos, como ahora podrían hacerlo en la cabeza del aprendiz.

La experiencia muestra

> *"... que también es posible estudiar a ciegas, en lo que a metas se refiere, ... Esta forma de abordar su estudio está de moda entre quienes niegan la importancia de la motivación. Pero creo que esto es didácticamente erróneo y ciertamente lo*

> *es como método para guiar la investigación. ... la motivación es una de las fuentes más importantes del interés del estudiante o del estudioso y es, por lo tanto, un instrumento poderoso para despertar vocaciones."*

señaló sabiamente Calderón. En estas ideas vitales que penetran hasta la estructura misma del universo para hacerlo entendible reside, en gran parte, el prestigio de la Matemática y su influencia en la cultura.

Este poder real de la matemática que está en el dominio de las estructuras que hacen inteligible al mundo físico, sirve para dominarlo. Es por ello que siempre tubo un lugar de privilegio y un sitio preferencial junto al Poder Político. La vida de Euler fue un ejemplo de lo que decimos.

La historia cuenta que Euler se adaptó perfectamente a la vida intelectual de la Academia de San Petersburgo. Dedicó una gran cantidad de esfuerzo a la investigación, aunque estuvo constantemente a disposición del Estado que, después de todo, pagó su salario. Una y otra vez se encontró como consultor científico del gobierno, por cuya capacidad él preparó los mapas, aconsejó a la marina de guerra rusa, e incluso, probó diseños para los motores de bomberos.

Mientras tanto, su fama crecía. Uno de sus primeros triunfos fue una solución del llamado "Problema de Bassel" que había dejado perplejo a los matemáticos de la mayor parte del siglo anterior. Después Euler generalizó considerablemente el problema, y sus ideas fueron tomadas por otros. Años después, Bernhard Riemann definió la función zeta y demostró sus propiedades básicas. Recordemos aquí una vez más, las investigaciones de B. Riemann tuvieron un objetivo: comprender el funcionamiento del Universo. Mirado en perspectiva este fue un importante servicio que prestó la matemática de Riemann a la Física. Calderón dijo en aquella conferencia:

> *"La matemática es la reina de las ciencias,*
> *y toda buena reina debe servir a sus súbditos."*

Su segunda reflexión

> *"... más importante que acumular información es interiorizarse de métodos y saber qué propósito tienen, es decir, saber dónde parten y adónde llevan. Porque los métodos tienen una orientación, una dinámica, de las cuales los resultados y teoremas aislados carecen."*

Pero ¿qué son los métodos? ¿cómo se estudian? Los métodos son instrumentos para conseguir o alcanzar algo y así como un artesano aprende su oficio aprendiendo a manipular sus herramientas, es imposible aprender matemática sin disponerse a hacerla de manera activa y no como un observador pasivo. Por eso es mejor usar sus métodos o, mejor aún, descubrirlos aunque sea parcialmente. De esta manera Calderón nos orienta en el trabajo cotidiano del profesor. Se aprende por un manejo lúcido de los procesos típicos del matemático. Estos procesos deberían buscarse en el contexto histórico que los enmarca. Debería resultar extraordinariamente útil tratar de mirar la situación con la que aquellos se enfrentaron.

Así como las herramientas o el instrumental no hacen de por sí al buen orfebre, sino más bien la forma que el artista la utiliza, la acumulación de instrumentos no hace al buen desempeño del matemático. Por eso es importante la resolución de problemas.

> *"Nos brinda una experiencia en profundidad, una oportunidad de conocer y pulsar las dificultades, de conocer los alcances y limitaciones del instrumental y del conocimiento matemático que poseemos. Me refiero por supuesto a problemas no rutinarios o mecánicos cuya resolución exige iniciativa mental e ingenio."*

Es una forma de estimular la autonomía, el descubrimiento paulatino de estructuras matemáticas sencillas, de problemas interesantes relacionados con tales situaciones que surgen de modo natural.

Su aplicación a la resolución de los problemas, que a muchos les parece un objetivo inalcanzable, puede ser una verdadera fuente de satisfacción y placer intelectual, de asombro ante el poder del pensamiento matemático eficaz y de una fuerte atracción hacia la matemática, como ocurre con los participantes de la OMA.

Calderón concluyo su Conferencia con esta palabras:

> *"... todos somos capaces de inventar y descubrir en mayor o menor medida, y este aspecto activo y creador de nuestra mente debe ser cultivado en todo momento. Inclusive, diría yo, él nos brida el único camino para lograr un conocimiento profundo de cualquier disciplina. Nuestra mente es naturalmente activa y no soporta la inactividad o la inacción sin correr grave peligro de atrofia."*

La conferencia de Calderón se realizó durante la XXXVI Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina en Octubre de 1986. Fue publicada en la Revista de Educación Matemática (Calderón, 1987).

Referencias

Alberto P. Calderón. *Reflexiones sobre el aprendizaje y enseñanza de la matemática*. Revista de Educación Matemática, Vol 3 (1987), N° 1, 3 – 13.

Juan Carlos Dalmasso
Director de OMA,
(✉) jcdalmasso1810@gmail.com

Recibido: *13 de junio de 2018*.
Aceptado: *17 de julio de 2018*.
Publicado en línea: *30 de agosto de 2018*.

¿Sabías que...

por Ricardo Podestá

el número π se esconde en el triángulo de Pascal?

El triángulo de Pascal es el arreglo en forma triangular de todos los números combinatorios $\binom{n}{k}$, $0 \leq k \leq n$. El número $\binom{n}{k}$ cuenta de cuántas maneras distintas se pueden elegir k objetos de un total de n y tiene la expresión $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ donde $n! = n(n-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ es el factorial de n. Las primeras filas son

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6}
\end{array}
\quad = \quad
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & {\color{red}1} & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & {\color{red}3} & & {\color{blue}1} & & & \\
 & & 1 & & 4 & & {\color{red}6} & & {\color{blue}4} & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & {\color{red}10} & & {\color{blue}10} & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & {\color{red}15} & & {\color{blue}20} & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Algunas familias de números se 'esconden' en dicho triángulo. Los números triangulares $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$ y los números tetraedrales $T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ son muy fáciles de hallar. Estos son $1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots$ y $1, 4, 10, 20, 35, \ldots$ respectivamente, y se encuentran en la segunda y tercera diagonal (en rojo y azul). Los famosos números de Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ también se pueden encontrar. Estos números se obtienen recursivamente empezando por 1 y 1 y sumando los 2 términos anteriores. Si alineamos el triángulo a la izquierda, esta sucesión se encuentra sumando los números de las diagonales ascendentes desde la izquierda (dejamos al lector la verificación de este hecho).

¿Cómo encontrar el número π en el triángulo si éste sólo consta de números enteros? Hay infinitas aproximaciones racionales de π, por ejemplo $\frac{355}{113}$ da 6 decimales correctos ($\frac{223}{71}$ sólo da 2 decimales correctos, pero su numerador y denominador son números primos). Sin embargo, si queremos encontrar el número exacto, estamos obligados a usar algún desarrollo infinito o función trascendente. Existen algunos productos infinitos que dan π. Por ejemplo, la identidad $\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots$ de Viète (1593), que 'desafortunadamente' usa números irracionales. Usando solo números racionales tenemos

$$\text{(1)} \qquad \pi = \prod_{n \text{ par}} \frac{n^2}{n^2-1} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)(2k)}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots$$

debida a John Wallis (1655) y

$$\text{(2)} \qquad \frac{\pi}{4} = \Big(\prod_{p \equiv 1 \bmod 4} \frac{p}{p-1} \Big) \Big(\prod_{p \equiv 3 \bmod 4} \frac{p}{p+1} \Big) = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} \cdots$$

donde los productos son sobre primos (cada fracción es un primo sobre el múltiplo de 4 más cercano). La simpleza y belleza de las expresiones (1) y (2) es asombrosa.

Hay algunas series cuya suma está relacionada con π. Nos interesan sólo aquellas cuyos términos son fracciones. Tenemos las expresiones famosas

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots \tag{3}$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \tag{4}$$

debidas a Gottfried Leibnitz (1676) y Leonhard Euler (1735), respectivamente. Mucho menos conocida es la atribuida a Nilakhanta Somayaji (India, 1444-1544):

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4} + \sum_{n\geq 3 \text{ impar}} \frac{(-1)^{[\frac{n}{2}]}}{n^3-n} = 3 + \frac{1}{3^3-3} - \frac{1}{5^3-5} + \frac{1}{7^3-7} - \cdots$$

Equivalentemente, como $n^3 - n = n(n^2-1) = (n-1)n(n+1)$, tenemos

$$\pi = 3 + \frac{4}{2\cdot 3\cdot 4} - \frac{4}{4\cdot 5\cdot 6} + \frac{4}{6\cdot 7\cdot 8} - \frac{4}{8\cdot 9\cdot 10} + \cdots \tag{5}$$

Las expresiones (1) – (5) utilizan números racionales para representar π. La expresión (2) no puede ser usada para encontrar π de forma sencilla en el triángulo de Pascal, por lo que no la consideraremos. Sin embargo, el resto de las expresiones son fácilmente detectables en dicho triángulo. Por ejemplo, de (1) tenemos que

$$\frac{\pi}{4} = \frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdots \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\ 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\ 1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\ 1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \end{array}$$

Dejamos que encuentres por tu cuenta los 'dibujos' de números que dan π en el triángulo, que corresponden a las expresiones (3) y (4).

La expresión (5) es muy bonita y permite hallar π de la siguiente manera.

$$\frac{\pi-3}{4} = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} - \frac{1}{4\cdot 5\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 7\cdot 8} - \cdots \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\ 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\ 1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\ 1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \end{array}$$

donde los números en rojo representan las fracciones positivas y los números en azul las fracciones negativas.

Otra forma de encontrar π en el triángulo a partir de (5) es la siguiente (Foster, 2018):

$$\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1\\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1\\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1\\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1\\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1
\end{array}$$

donde el número en círculo es el numerador y los otros dos del mismo color son los denominadores. El rojo corresponde a términos positivos y el azul a términos negativos. Esto sale de observar que

$$\frac{\binom{n}{1}}{\binom{n}{2}\binom{n+1}{2}} = \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}\,\frac{(n+1)n}{2}} = \frac{4}{(n-1)n(n+1)}.$$

Cuando n es impar, éstos son los términos de (5).

Existe una forma más sorprendente aún, debida a Jonas Castillo Toloza (2007), y es ¡usando los números triangulares de los cuales hablamos al principio! A partir de la igualdad

$$\pi - 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}}{t_n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} - \cdots$$

se tiene

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} - \cdots \leftrightarrow \quad \begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1\\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1\\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1\\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1
\end{array}$$

El triángulo lleva su nombre en homenaje a Blaise Pascal (1623-1662) quien estudió sus propiedades. Sin embargo, se lo conoce desde mucho antes. En occidente fue estudiado por Petrus Apianus (Alemania, 1495-1552), Niccolò Fontana Tartaglia (Italia, 1500-1577), Michael Stifel (Alemania, 1486-1567) y François Viète (Francia, 1540-1603). En oriente ya era conocido en la India (Pingala, 200 a.C.), por los chinos Jia Xian (1010-1070) y Yang Hui (1238-1298); y por los persas Al-Karaji (953-1029) y Omar Khayyám (1048-1131).